RIPASSO PRODOTTI NOTEVOLI

prof. diego fantinelli | anno scolastico 2021-'22

Classe 2^I - ITIS "E. Fermi" - Bassano del Grappa

PRODOTTI NOTEVOLI

Con l'espressione **Prodotti Notevoli** si indicano alcune identità che si ottengono in seguito alla moltiplicazione di polinomi aventi caratteristiche particolari e facili da ricordare.

Quadrato di un Binomio:

$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$

$(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$

Quadrato di un binomio

Consideriamo il binomio $A+B$, in cui A e B rappresentano due monomi ed analizziamo che cosa succede moltiplicando il binomio per se stesso, $(A+B)(A+B)=(A+B)^2$. Svolgendo i calcoli si ottiene:

$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2=A^2+2AB+B^2.$

Pertanto, senza effettuare i passaggi intermedi si ha

$$\boxed{(A+B)^2=A^2+2AB+B^2}$$

Quindi, il quadrato di un binomio è uguale alla somma algebrica tra il quadrato del primo termine, il quadrato del secondo termine e il doppio prodotto del primo termine per il secondo.

Eseguendo i prodotti, bisogna fare attenzione ai segni dei monomi: mentre i due quadrati saranno sempre positivi, il doppio prodotto può cambiare segno a seconda del segno di A e B. Ad esempio:

$(2ab^3+3cx)^2=4a^2b^6+9c^2x^2+12ab^3cx$, mentre $(2ab^3-3cx)^2=4a^2b^6+9c^2x^2-12ab^3cx$.

Quadrato di un **Trinomio:**

$(A+B+C)^2=A^2+B^2+C^2+2AB+2BC+2AC$

Quadrato di un Trinomio

In modo del tutto analogo, considerando il trinomio $A+B+C$, il suo quadrato sarà uguale a

$$\boxed{(A+B+C)^2 = A^2+B^2+C^2+2\,AB+2\,BC+2\,AC}$$

Ancora una volta, fare attenzione ai segna quando si eseguono i doppi prodotti: ad esempio, $(2a+b^2-x^3y)^2 = 4a^2+b^4+x^6y^2+4ab^2-4ax^3y-2b^2x^3y$.

Somma per Differenza e/o Differenza di quadrati

$(A+B) \cdot (A-B)=A^2-B^2$

Prodotto della somma fra due monomi per la loro differenza

Consideriamo due monomi, A e B, e i binomi che otteniamo dalla loro somma e dalla loro differenza: $A+B$ e $A-B$. Eseguiamone il prodotto: $(A+B)(A-B)=A^2-AB+AB-B^2=A^2-B^2$. Quindi:

$$\boxed{(A+B)(A-B)=A^2-B^2}$$

In generale, il prodotto tra la somma di due monomi e la loro differenza è uguale al quadrato del primo termine meno il quadrato del secondo termine. Ad esempio, $(2a^2+3b^3)(2a^2-3b^3)=(2a^2)^2-(3b^3)^2=4a^4-9b^6$.

Somma o Differenza di Cubi

"falso quadrato"

Questo Prodotto Notevole è "meno famoso" degli altri, perchè viene utilizzato di meno, ma quando i calcoli si faranno più complessi - soprattutto all'Università -, ricordarlo vi farà risparmiare un sacco di tempo e, in un esame, il tempo è la cosa più preziosa.

$$A^3 + B^3 = (A+B) \cdot (A^2 - AB + B^2)$$

Somma o differenza di cubi

Ora eseguiamo il seguente prodotto: $(A+B)(A^2-AB+B^2) = A^3 - A^2B + A^2B + AB^2 - AB^2 + B^3 = A^3 + B^3$. Il trinomio $A^2 - AB + B^2$ è comunemente noto come *falso quadrato*, poichè differisce da quadrato di un binomio solo per il fattore 2. Leggendo la catena di uguaglianze nell'altro verso, possiamo concludere che

$$\boxed{A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)}$$

Con calcoli del tutto analoghi, si conclude che

$$\boxed{A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)}$$

Notare come il segno presente nel falso quadrato sia l'opposto di quello tra i due cubi, mentre il segno presente nel binomio sia invece lo stesso. Facciamo un esempio:

$$\begin{aligned} 8a^6 - 27b^3 &= (2a^2)^3 - (3b)^3 = \\ &= (2a^2 - 3b)((2a^2)^2 + 2a^2 \cdot 3b + (3b)^2) = \\ &= (2a^2 - 3b)(4a^4 + 6a^2b + 9b^2) \end{aligned}$$

Cubo di un Binomio

$$(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$$

$$(A-B)^3=A^3-3A^2B+3AB^2-B^3$$

Cubo di un Binomio

Ora eseguiamo il cubo di un binomio: $(A+B)^3=(A+B)(A+B)^2=(A+B)(A^2+2AB+B^2)=A^3+2A^2B+AB^2+A^2B+2AB^2+B^3$ che raccogliendo i termini simili è uguale a $A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$. In definitiva:

$$\boxed{(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3}$$

Possiamo dunque dire che il cubo di un binomio è uguale alla somma algebrica tra il cubo del primo termine, il cubo del secondo termine, il triplo prodotto del quadrato del primo termine per il secondo termine ed il triplo prodotto del primo termine per il quadrato del secondo termine.

Qui bisogna prestare particolare attenzione ai segni: per esempio

$$\begin{aligned}(2a-b^2)^3 &= (2a+(-b^2))^3 = \\ &= 8a^3+3\cdot(2a)^2\cdot(-b^2)+3\cdot(2a)\cdot(-b^2)^2+(-b^2)^3 = \\ &= 8a^3-12a^2b^2+6ab^4-b^6\end{aligned}$$

CONCLUSIONI

I **Prodotti Notevoli** non sono altro che dei casi particolari di moltiplicazioni tra Polinomi che vengono utilizzati molto spesso nel Calcolo Letterale, quindi conviene impararli a memoria; ma la cosa fondamentale è che vanno letti, utilizzati e imparati, in **entrambe** le **direzioni**!

BUON LAVORO!

"Non hai veramente capito qualcosa finché non sei in grado di spiegarlo a tua nonna"

(A. Einstein)